第6講　ベクトル

1　点Oを原点とする座標空間に2点

$$A(3,\ 3,\ -6),\quad B(2+2\sqrt{3},\ 2-2\sqrt{3},\ -4)$$

をとる。3点O，A，Bの定める平面をαとする。また，αに含まれる点Cは

$$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC},\quad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=24 \quad\cdots\cdots①$$

を満たすとする。

(1)　$|\overrightarrow{OA}|=$ ア $\sqrt{\text{イ}}$，$|\overrightarrow{OB}|=$ ウ $\sqrt{\text{エ}}$ であり，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$ オカ である。

(2)　点Cは平面α上にあるので，実数s，tを用いて，$\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$と表すことができる。このとき，①から$s=\dfrac{\text{キク}}{\text{ケ}}$，$t=$ コ である。したがって，

$|\overrightarrow{OC}|=$ サ $\sqrt{\text{シ}}$ である。

（1は次ページに続く。）

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\left(\boxed{\text{ス}},\ \boxed{\text{セ}},\ \boxed{\text{ソタ}}\right)$ である。したがって，平面 α 上の四角形 OABC は $\boxed{\text{チ}}$。$\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。ただし，少なくとも一組の対辺が平行な四角形を台形という。

⓪　正方形である
①　正方形ではないが，長方形である
②　長方形ではないが，平行四辺形である
③　平行四辺形ではないが，台形である
④　台形ではない

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるので，四角形 OABC の面積は $\boxed{\text{ツテ}}$ である。

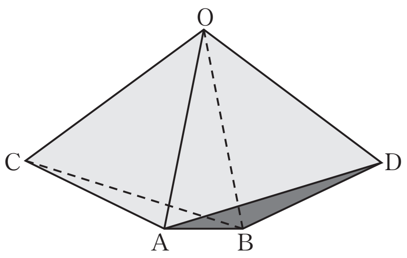
(4)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\sqrt{6}$ かつ z 座標が 1 であるような点 D の座標は

$$\left(\boxed{\text{ト}}+\frac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}},\ \boxed{\text{ヌ}}-\frac{\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}},\ 1\right)$$

である。このとき $\angle\mathrm{COD}=\boxed{\text{ハヒ}}^\circ$ である。

3 点 O，C，D の定める平面を β とする。α と β は垂直であるので，三角形 ABC を底面とする四面体 DABC の高さは $\sqrt{\boxed{\text{フ}}}$ である。したがって，四面体 DABC の体積は $\boxed{\text{ヘ}}\sqrt{\boxed{\text{ホ}}}$ である。

2 (1) 右の図のような立体を考える。ただし，六つの面 OAC, OBC, OAD, OBD, ABC, ABD は 1 辺の長さが 1 の正三角形である。この立体の ∠COD の大きさを調べたい。



線分 AB の中点を M，線分 CD の中点を N とおく。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(i) 次の ア ～ エ に当てはまる数を求めよ。

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}(\vec{a}+\vec{b}),\quad \overrightarrow{ON}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}(\vec{c}+\vec{d})$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$$

(ii) 3 点 O, N, M は同一直線上にある。内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CN}$ の値を用いて，$\overrightarrow{ON}=k\overrightarrow{OM}$ を満たす k の値を求めよ。

$$k=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$$

(2は次ページに続く。)

(iii) $\angle\mathrm{COD}=\theta$ とおき，$\cos\theta$ の値を求めたい。次の**方針 1** または**方針 2** について，$\boxed{\text{キ}}$ 〜 $\boxed{\text{シ}}$ に当てはまる数を求めよ。

方針 1

$\vec{d}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表すと，

$$\vec{d}=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\vec{b}-\vec{c}$$

であり，$\vec{c}\cdot\vec{d}=\cos\theta$ から $\cos\theta$ が求められる。

方針 2

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ のなす角を考えると，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right|$ が成り立つ。

$\left|\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right|^2=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}+\dfrac{1}{2}\cos\theta$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}}$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|$ の値を用いると，

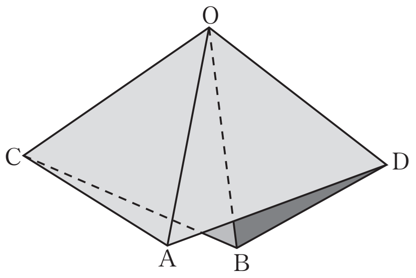
$\cos\theta$ が求められる。

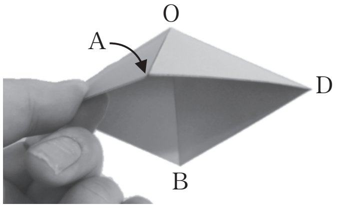
(iv) **方針 1** または**方針 2** を用いて $\cos\theta$ の値を求めよ。

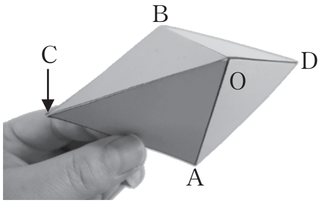
$$\cos\theta=\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

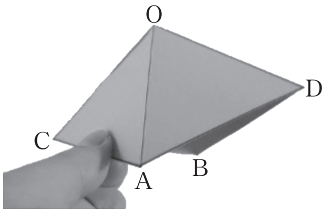
(2は次ページに続く。)

(2)　(1)の図形から，四つの面 OAC，OBC，OAD，OBD だけを使って，下のような図形を作成したところ，この図形は ∠AOB を変化させると，それにともなって ∠COD も変化することがわかった。









$\angle AOB = \alpha$，$\angle COD = \beta$ とおき，$\alpha > 0$，$\beta > 0$ とする。このときも，線分 AB の中点と線分 CD の中点および点 O は一直線上にある。

（2は次ページに続く。）

(i)　α と β が満たす関係式は(1)の**方針 2** を用いると求めることができる。その関係式として正しいものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。 タ

⓪　$\cos\alpha+\cos\beta=1$

①　$(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)=1$

②　$(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)=-1$

③　$(1+2\cos\alpha)(1+2\cos\beta)=\dfrac{2}{3}$

④　$(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)=\dfrac{2}{3}$

(ii)　$\alpha=\beta$ のとき，$\alpha=$ チツ °であり，このとき，点 D は テ にある。

チツ に当てはまる数を求めよ。また， テ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ。

⓪　平面 ABC に関して O と同じ側

①　平面 ABC 上

②　平面 ABC に関して O と異なる側

3 四面体OABCについて，OA⊥BCが成り立つための条件を考えよう。次の問いに答えよ。ただし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

(1) O(0, 0, 0)，A(1, 1, 0)，B(1, 0, 1)，C(0, 1, 1) のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ア となる。$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{BC}\neq\vec{0}$ であることに注意すると，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=$ イ によりOA⊥BCである。

(2) 四面体OABCについて，OA⊥BCとなるための必要十分条件を，次の⓪～③のうちから一つ選べ。 ウ

⓪ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$　　① $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$

② $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　　③ $|\vec{a}|^2=\vec{b}\cdot\vec{c}$

（3は次ページに続く。）

(3)　OA⊥BC が常に成り立つ四面体を，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。 エ

⓪　OA＝OB かつ ∠AOB＝∠AOC であるような四面体 OABC

①　OA＝OB かつ ∠AOB＝∠BOC であるような四面体 OABC

②　OB＝OC かつ ∠AOB＝∠AOC であるような四面体 OABC

③　OB＝OC かつ ∠AOC＝∠BOC であるような四面体 OABC

④　OC＝OA かつ ∠AOC＝∠BOC であるような四面体 OABC

⑤　OC＝OA かつ ∠AOB＝∠BOC であるような四面体 OABC

(3は次ページに続く。)

(4) OC＝OB＝AB＝AC を満たす四面体 OABC について，OA⊥BC が成り立つことを下のように証明した。

【証明】

線分 OA の中点を D とする。

$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\left(\boxed{\text{オ}}+\boxed{\text{カ}}\right)$，$\overrightarrow{OA}=\boxed{\text{オ}}-\boxed{\text{カ}}$ により

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\left\{\left|\boxed{\text{オ}}\right|^2-\left|\boxed{\text{カ}}\right|^2\right\}$ である。

また，$\left|\boxed{\text{オ}}\right|=\left|\boxed{\text{カ}}\right|$ により $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ である。

同様に，$\boxed{\text{キ}}$ により $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ である。

このことから $\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{BC}\neq\vec{0}$ であることに注意すると，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD})=0$ により OA⊥BC である。

(i) $\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちからそれぞれ一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ $\overrightarrow{BA}$　① $\overrightarrow{BC}$　② $\overrightarrow{BD}$　③ $\overrightarrow{BO}$

(ii) $\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ $|\overrightarrow{CO}|=|\overrightarrow{CB}|$　① $|\overrightarrow{CO}|=|\overrightarrow{CA}|$　② $|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$

③ $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$　④ $|\overrightarrow{BO}|=|\overrightarrow{BA}|$

(3は次ページに続く。)

(5) (4)の証明は，OC＝OB＝AB＝AC のすべての等号が成り立つことを条件として用いているわけではない。このことに注意して，OA⊥BC が成り立つ四面体を，次の⓪～③のうちから一つ選べ。 ク

⓪ OC＝AC かつ OB＝AB かつ OB≠OC であるような四面体 OABC

① OC＝AB かつ OB＝AC かつ OC≠OB であるような四面体 OABC

② OC＝AB＝AC かつ OC≠OB であるような四面体 OABC

③ OC＝OB＝AC かつ OC≠AB であるような四面体 OABC

第6講　ベクトル

1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,\ 3,\ -6)=3(1,\ 1,\ -2)$ より $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}=3\sqrt{6}$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2+2\sqrt{3},\ 2-2\sqrt{3},\ -4)=2(1+\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3},\ -2)$ より

$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2+(-2)^2}=2\sqrt{2(1+3)+4}=4\sqrt{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3(2+2\sqrt{3})+3(2-2\sqrt{3})+(-6)\cdot(-4)=12+24=36$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$

$s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

$54s+36t=0$　　よって $3s+2t=0$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=24$ より $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})=24$

$s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=24$

$36s+48t=24$　　よって $3s+4t=2$

したがって　$s=-\frac{2}{3}$, $t=1$

このとき $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\frac{2}{3}(3,\ 3,\ -6)+(2+2\sqrt{3},\ 2-2\sqrt{3},\ -4)$

$=(2\sqrt{3},\ -2\sqrt{3},\ 0)=2\sqrt{3}(1,\ -1,\ 0)$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2\sqrt{3}\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=2\sqrt{6}$

(参考)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より

$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=\left|-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=\frac{4}{9}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$

$=\frac{4}{9}\cdot54-\frac{4}{3}\cdot36+48=24$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2\sqrt{6}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(2+2\sqrt{3},\ 2-2\sqrt{3},\ -4)-(2\sqrt{3},\ -2\sqrt{3},\ 0)$

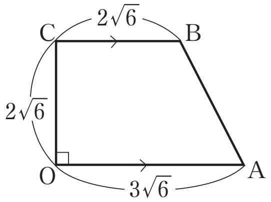
$=(2,\ 2,\ -4)$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\frac{2}{3}(3,\ 3,\ -6)=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より，四角形 OABC は

平行四辺形ではないが，台形である（③）

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$，$\left|\overrightarrow{CB}\right|=\dfrac{2}{3}\left|\overrightarrow{OA}\right|=2\sqrt{6}$ より

四角形OABCの面積は $\left(2\sqrt{6}+3\sqrt{6}\right)\cdot2\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{2}=30$



(4) D$(x,\ y,\ 1)$ とおく。

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OD}$ より $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=0$　　$3x+3y-6=0$　　よって $x+y=2$

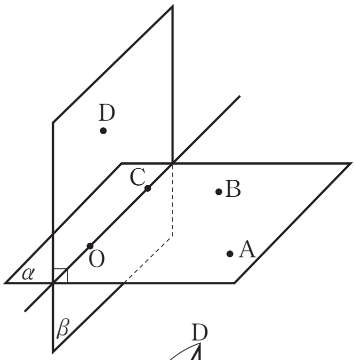
$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=2\sqrt{6}$ より $2\sqrt{3}x-2\sqrt{3}y=2\sqrt{6}$　　よって $x-y=\sqrt{2}$

したがって $x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$y=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より $\mathrm{D}\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \ 1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 1\right)$

$\cos\angle\mathrm{COD}=\dfrac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}}{\left|\overrightarrow{OC}\right|\left|\overrightarrow{OD}\right|}=\dfrac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot2}=\dfrac{1}{2}$　　よって $\angle\mathrm{COD}=60°$

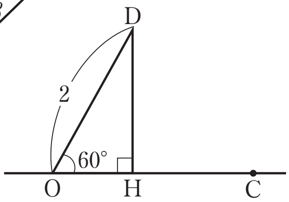
平面$\alpha\perp$平面β，すなわち平面OAC⊥平面OCDであり，この2つの平面の交線は直線OCである。

よって，点Dから直線OCに垂線DHを下ろすと，DH⊥平面OACであり，DHは，△ABCを底面とする四面体DABCの高さである。



よって，求める高さは

$\mathrm{DH}=\mathrm{OD}\sin60°=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$



△ABCにおいて，底辺をBCとすると高さはOCである。

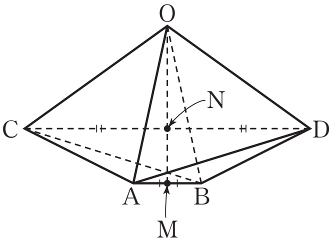
よって，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{6}\cdot2\sqrt{6}=12$

したがって，四面体DABCの体積は

$\dfrac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{DH}=\dfrac{1}{3}\cdot12\cdot\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

2 (1)(i) $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{ON}=\dfrac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}\right)=\dfrac{1}{2}\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{d}$



また，△OABは1辺の長さが1の正三角形であることから，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos60°=1\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

同様に考えて，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}=\dfrac{1}{2}$

(ii)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{OA}\cdot\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\vec{a}\cdot\dfrac{1}{2}\left(\vec{d}-\vec{c}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}\cdot\vec{d}-\vec{a}\cdot\vec{c}\right)=0$ ……①

また，$\overrightarrow{ON}=k\overrightarrow{OM}$ より

$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}=k\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)-\vec{c}=\dfrac{k}{2}\vec{a}+\dfrac{k}{2}\vec{b}-\vec{c}$

よって

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CN}=\vec{a}\cdot\left(\dfrac{k}{2}\vec{a}+\dfrac{k}{2}\vec{b}-\vec{c}\right)=\dfrac{k}{2}\left|\vec{a}\right|^2+\dfrac{k}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$

$=\dfrac{k}{2}\cdot 1^2+\dfrac{k}{2}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}k-\dfrac{1}{2}$ ……②

①，②より $\dfrac{3}{4}k-\dfrac{1}{2}=0$　　よって $k=\dfrac{2}{3}$

(iii)(iv)

【方針１】

(ii)より $\overrightarrow{ON}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OM}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

また $\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{2}\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{d}$ より $\dfrac{1}{2}\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{d}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

よって，$\vec{d}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}$

$\vec{c}\cdot\vec{d}=\left|\vec{c}\right|\left|\vec{d}\right|\cos\theta=1\cdot 1\cdot\cos\theta=\cos\theta$

よって $\cos\theta=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{c}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}\right)=\dfrac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}-\left|\vec{c}\right|^2$

$=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{3}$

【方針２】

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\left|\overrightarrow{OM}\right|\left|\overrightarrow{ON}\right|\cos 0^\circ=\left|\overrightarrow{OM}\right|\left|\overrightarrow{ON}\right|$

(ii)より $\overrightarrow{ON}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OM}$ であるから $\overrightarrow{OM}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{ON}$　よって $\left|\overrightarrow{OM}\right|=\dfrac{3}{2}\left|\overrightarrow{ON}\right|$

したがって，$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\dfrac{3}{2}\left|\overrightarrow{ON}\right|\left|\overrightarrow{ON}\right|=\dfrac{3}{2}\left|\overrightarrow{ON}\right|^2$

$\left|\overrightarrow{ON}\right|^2=\left|\dfrac{1}{2}\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{d}\right|^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left|\vec{c}+\vec{d}\right|^2=\dfrac{1}{4}\left(\left|\vec{c}\right|^2+2\vec{c}\cdot\vec{d}+\left|\vec{d}\right|^2\right)$

$=\dfrac{1}{4}(1^2+2\cos\theta+1^2)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\theta$ ……③

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\dfrac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}\right)$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots④$$

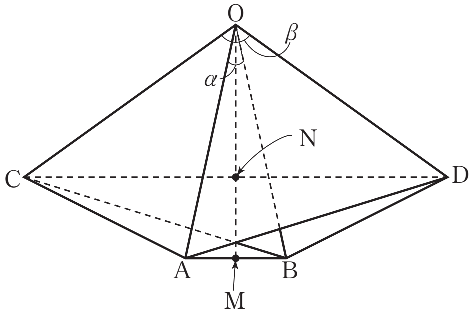
よって $\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta\right)$ より $\cos\theta=-\frac{1}{3}$

(2)　△OAC, △OBC, △OAD, △OBD は, 1 辺の長さが 1 の正三角形であることから,

$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}=\frac{1}{2}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos\alpha=\cos\alpha$,

$\vec{c}\cdot\vec{d}=1\cdot1\cdot\cos\beta=\cos\beta$



線分 AB の中点を M, 線分 CD の中点を N とすると, O, M, N は一直線上にある。

(i)　(1)の【方針 2】の③と同様の計算により

$$\left|\overrightarrow{OM}\right|^2=\frac{1}{4}\left(|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha$$

$$\left|\overrightarrow{ON}\right|^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\beta$$

④より $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}$

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\left|\overrightarrow{OM}\right|\left|\overrightarrow{ON}\right|$ より, $\left(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}\right)^2=\left|\overrightarrow{OM}\right|^2\left|\overrightarrow{ON}\right|^2$

よって $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)\cdot\frac{1}{2}(1+\cos\beta)$ より $(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)=1$　(①)

(ii)　$\alpha=\beta$ のとき $(1+\cos\alpha)^2=1$　　$1+\cos\alpha=\pm1$

$\cos\alpha=-2,\ 0$　　$-1\leqq\cos\alpha\leqq1$ より $\cos\alpha=0$　　よって $\alpha=90°$

このとき, $\left|\overrightarrow{OM}\right|=\left|\overrightarrow{ON}\right|$ より, 点 M と点 N は一致する。

よって, 線分 AB と線分 CD の中点が一致するので, 四角形 ABDC は平行四辺形となり, 点 D は平面 ABC 上にある　(①)

3　(1)　$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=(1,\ 1,\ 0)$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}=(1,\ 0,\ 1)$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}=(0,\ 1,\ 1)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1+0+0=1$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\vec{c}-\vec{b}=(0,\ 1,\ 1)-(1,\ 0,\ 1)=(-1,\ 1,\ 0)$

よって, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=-1+1+0=0$ より $OA\perp BC$

(2)　$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{BC}\neq\vec{0}$ より

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}\iff\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$\iff\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)=0$

$\iff \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$\iff \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$

したがって，四面体 OABC について OA⊥BC となるための必要十分条件は

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$　(①)

(3)　(2)より OA⊥BC が常に成り立つための条件は $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$

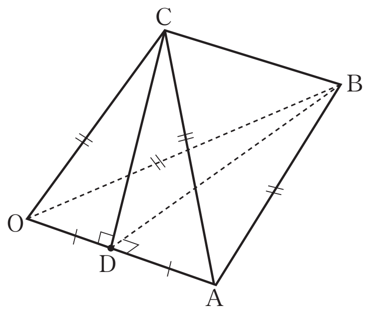
すなわち $|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\cos\angle AOC$

$|\overrightarrow{OA}|\neq 0$ より $|\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB=|\overrightarrow{OC}|\cos\angle AOC$

これが成り立つような四面体を選択肢⓪～⑤の中で選ぶと

OB＝OC かつ ∠AOB＝∠AOC であるような四面体 OABC　(②)

(4)(i)　線分 OA の中点を D とすると



$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BO}\right)$，　$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BO}$ により

⓪　③

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BO}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BO}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{|\overrightarrow{BA}|^2-|\overrightarrow{BO}|^2\right\}$ である。

また，AB＝OB より $|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{BO}|$　よって $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ である。

(ii)　同様に，$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CO}\right)$，$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CO}$ により

$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\left\{|\overrightarrow{CA}|^2-|\overrightarrow{CO}|^2\right\}$

AC＝OC より $|\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{CO}|$　(①)　よって $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ である。

このことから，$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{BC}\neq\vec{0}$ であることに注意すると，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CD}=0-0=0$ により OA⊥BC

である。

(5)　(4)の証明においては，OC＝OB＝AB＝AC のすべての等号が成り立つことを条件として用いているわけではなく，用いているのは AB＝OB かつ AC＝OC のみ用いている。したがって，OA⊥BC が成り立つ四面体は OC＝AC かつ OB＝AB かつ OB≠OC であるような四面体 OABC　(⓪)